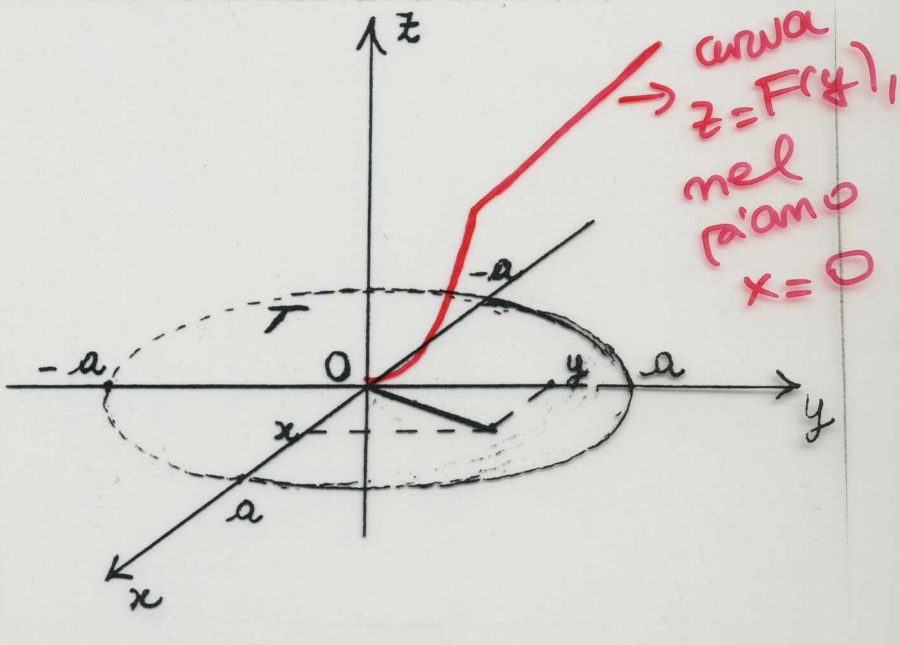
Superficie e solidi di rotazione

- **Superficie di rotazione:** ha equazione del tipo

$$z = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad \text{con } x^2+y^2 \leq R^2,$$

dove $0 < R \leq +\infty$, si ottiene dalla rotazione attorno all'asse z della curva di equazione

$$\begin{cases} z = F(y), & 0 \leq y \leq R, \\ x = 0 \end{cases}$$



Esempi:

$z^2 = m^2(x^2+y^2)$, $m \neq 0$: cono di vertice $(0,0,0)$

$z = a(x^2+y^2)+b$, $a \neq 0$: paraboloide di vertice $(0,0,b)$

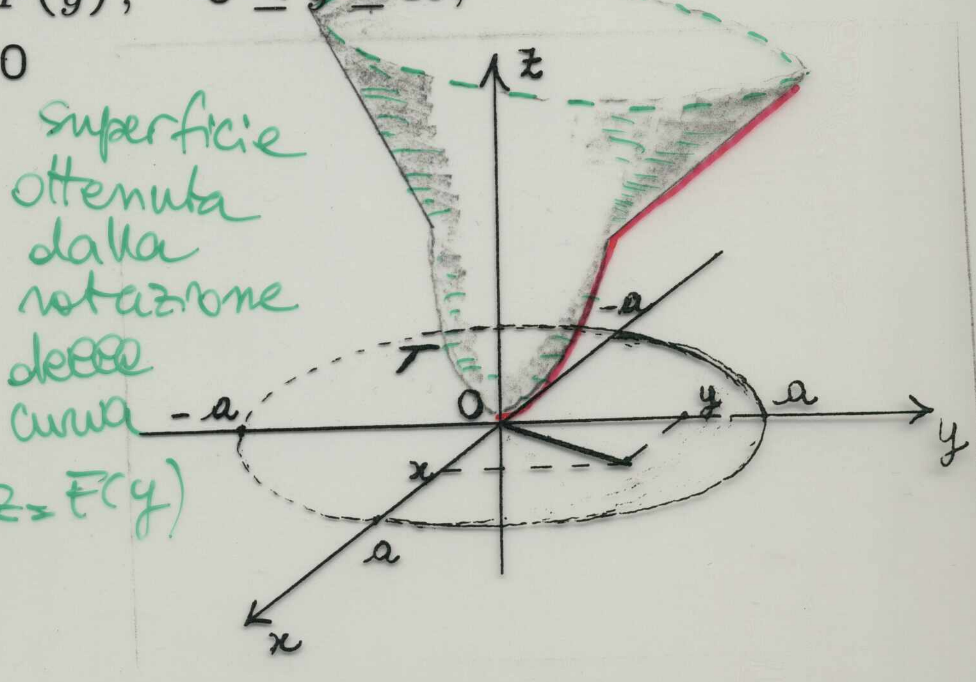
Superficie e solidi di rotazione

• **Superficie di rotazione:** ha equazione del tipo

$$z = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad \text{con } x^2+y^2 \leq R^2,$$

dove $0 < R \leq +\infty$, si ottiene dalla rotazione attorno all'asse z della curva di equazione

$$\begin{cases} z = F(y), & 0 \leq y \leq R, \\ x = 0 \end{cases}$$



<u>Esempi:</u>

$z^2 = m^2(x^2+y^2)$, $m \neq 0$: cono di vertice $(0,0,0)$

$z = a(x^2+y^2)+b$, $a \neq 0$: paraboloide di vertice $(0,0,b)$

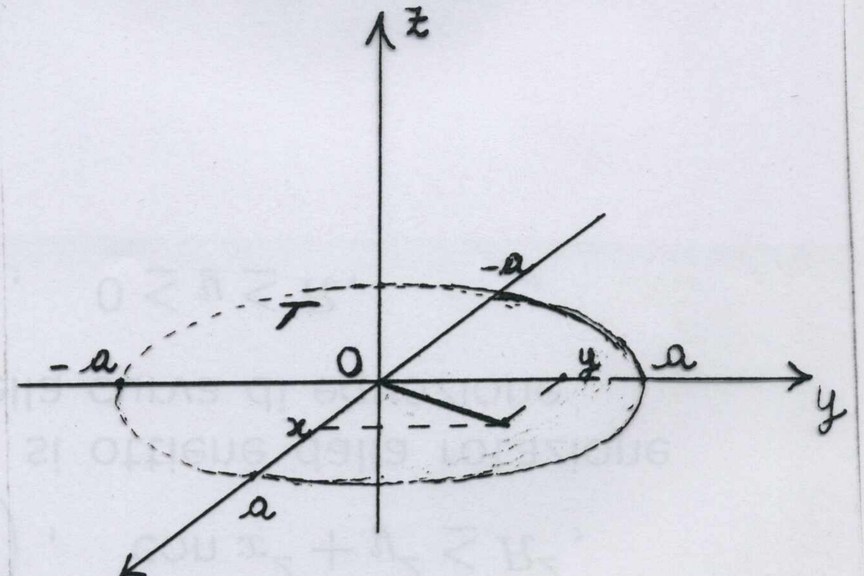
Superficie e solidi di rotazione

- **Superficie di rotazione:** ha equazione del tipo ✓ equazione CARTESIANA

$$z = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad \text{con } x^2+y^2 \le R^2,$$

dove $0 < R \le +\infty$, si ottiene dalla rotazione attorno all'asse z della curva di equazione

$$\begin{cases} z = F(y), & 0 \le y \le R, \\ x = 0 \end{cases}$$



Esempi:

$z^2 = m^2(x^2+y^2)$, $m \ne 0$: cono di vertice $(0,0,0)$

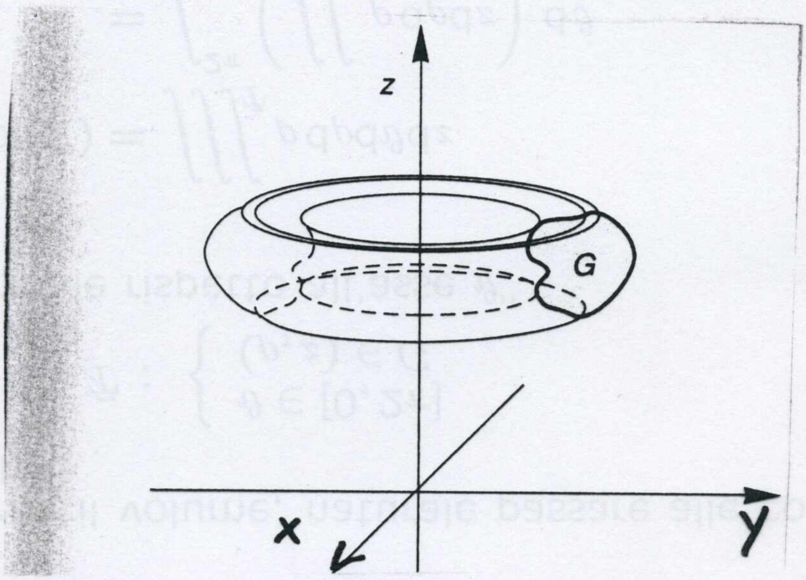
$z = a(x^2+y^2)+b$, $a \ne 0$: paraboloide di vertice $(0,0,b)$

per esempio, in questo caso

$F(y) = ay^2+b$

- **Solido di rotazione:** si ottiene dalla rotazione attorno all'asse z di una figura piana G contenuta nel piano yz

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \in G \right\}$$



- Per calcolarne il volume, naturale passare alle coordinate cilindriche:

$$\tilde{T} : \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi] \\ (\rho, z) \in G \end{cases}$$

è dominio "normale rispetto all'asse ϑ"

Quindi

$$\begin{aligned} \text{vol}(T) &= \iiint_{\tilde{T}} \rho \, d\rho d\vartheta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\iint_G \rho \, d\rho dz \right) d\vartheta \\ &= 2\pi \iint_G \rho \, d\rho dz \end{aligned}$$

Esercizio 6

Calcolare il volume del solido T ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della figura piana

$$G = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 - z \le y \le \sqrt{1 - z},\ z \in [0, 1] \right\}$$

Usando la formula e osservando che G è normale rispetto all'asse z si ha

$G: (\rho, z):$
$z \in [0,1]$
$1-z \le \rho \le \sqrt{1-z}$

$$\text{vol}(T) = 2\pi \iint_G \rho \, d\rho dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{1-z}^{\sqrt{1-z}} \rho \, d\rho \right) dz$$

$$= \pi \int_0^1 (z - z^2) \, dz = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 7

Dato $a > 1$, calcolare il volume del solido T ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della figura piana

$$G = \Big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad 1 \le z \le a\Big\}$$

Si ha

$$V := \mathrm{vol}(T) = 2\pi \iint_G \rho \, \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_a^1 \left(\int_0^{\ln(z+\sqrt{z^2-1})} \rho \, \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}z$$

$$= \pi \int_a^1 \ln^2(z + \sqrt{z^2 - 1}) \, \mathrm{d}z$$

Pongo

$$t = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \cosh^{-1}(z)$$

$$\Rightarrow \ z = \cosh(t), \ \mathrm{d}z = \sinh(t)\,\mathrm{d}t$$

quindi

$$V = \pi \int_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(a)} t^2 \sinh(t)\,\mathrm{d}t$$

che tratto integrando per parti (derivo t^2 e integro $\sinh(t)$!). Quindi

$$V = \pi \left[2\cosh(t) - 2t\sinh(t) + t^2\cosh(t)\right]_{\underbrace{\cosh^{-1}(1)}=0}^{\cosh^{-1}(a)}$$

- Ricordando che

$$\cosh^{-1}(1) = 0 \text{ e } \sinh(\cosh^{-1}(a)) = \sqrt{a^2 - 1}$$

ottengo

$$V = \pi\left(2(a-1) - 2\cosh^{-1}(a)\sqrt{a^2-1} + a(\cosh^{-1}(a))^2\right)$$

Esercizio 8 (assegnato)

Sia $a > 0$. Calcolare il volume del solido T ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della figura piana

$$G = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ 0 \leq z \leq a \right\}$$

Si ha

$$\text{vol}(T) = \frac{\pi}{4}(2a + \sinh(a)).$$